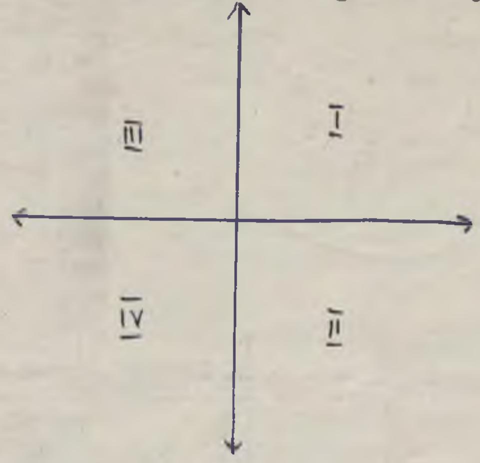
Benedykt Bornstein

Co to jest geometria kategorialna algebraiczno-logiczna

I. System ~~elementów geometrii kategorialnej~~.

Kreślimy na płaszczyźnie dwie linie proste /osie współrzędnych/ względem siebie prostopadłe i dzielimy w ten sposób płaszczyznę na 4 ćwiartki, jak poniżej /rys.1/:



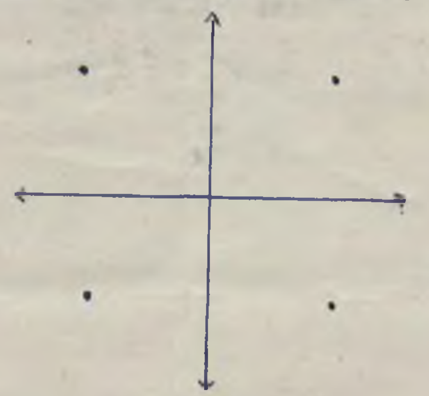
Rys. 1.

A teraz - w związku z tym podziałem płaszczyzny na 4 ćwiartki - zadajemy sobie pytanie: jakie są możliwe podstawowe rodzaje - kategorie- prostych i punktów na płaszczyźnie? czy i jakie są możliwe proste i punkty, znajdujące się:

1/ tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny
2/ w dwóch
3/ w trzech
4/ we wszystkich ćwiartkach płaszczyzny
5/ pozewnątrz ćwiartek płaszczyzny? x)

Jeżeli odpowiemy na te pytania, otrzymamy wszystkie możliwe kategorie prostych i punktów na płaszczyźnie.

Ad 1/. Jeżeli chodzi o proste, któreby znajdowały się tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny, to prostych takich, oczywiście, nie ma; wszelka bowiem nieograniczona linia prosta wybiega z konieczności poza obręb jednej z ćwiartek płaszczyzny, mieścić się nie może w jej tylko obrębie; jeżeli natomiast chodzi o punkty geometryczne, to najbardziej pospolitym, nasamprzód przychodzącym na myśl, będzie ten rodzaj punktów, które właśnie znajdują się tylko w jednej z ćwiartek. A więc mieć tu będziemy 4 rodzaje punktów: punkty, leżące wewnątrz: I, II, III i IV ćwiartki. W każdej z tych ćwiartek mamy nieskończoną mnogość takich punktów, lecz poszczególne punkty nas tu nie interesują; nie interesuje nas tu ich bliższe lub dalsze położenie względem osi poziomej czy pionowej - chodzi nam tu tylko o ich wspólną jakość, o to, że są to punkty, leżące wewnątrz takiej a takiej ćwiartki płaszczyzny. Dlatego też możemy wybrać dowolny punkt, leżący w I ćwiartce, i traktować go, jako przedstawiciela wszystkich punktów tej ćwiartki. Będzie on w ten sposób przedstawiał pewną kategorię geometryczną, kategorię punktów, leżących wewnątrz pierwszej ćwiartki. I tak samo w każdej innej ćwiartce. Otrzymamy w ten sposób 4 punkty kategorialne, jak poniżej /rys. 2/:



Rys. 2.

Ad 2/. Przechodzimy teraz do kwestii linij prostych, przechodzących przez dwie ćwiartki. Proste takie istnieją i jest ich 6 rodzajów, mianowicie:

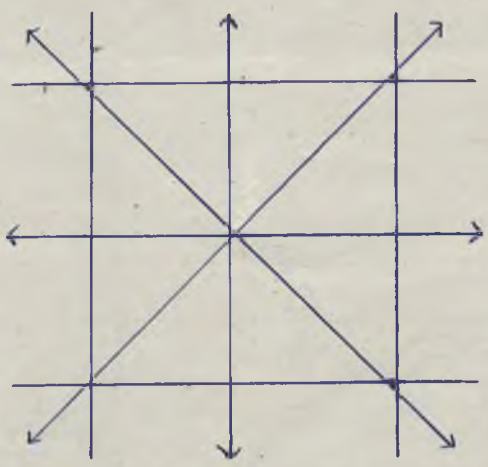
a/ proste, przechodzące przez ćwiartki I i II, czyli proste, równoległe do osi pionowej w prawej połowie płaszczyzny
b/ proste, przechodzące przez ćwiartki III i IV, czyli proste, równoległe do osi pionowej w lewej połowie płaszczyzny
c/ proste, przechodzące przez ćwiartki I i III, czyli proste,

x) W powyższym zadaniu mamy analogon wyszukania wszystkich elementarnych funkcyj prawdziwościowych dwóch argumentów logicznych.

równoległe do osi poziomej w górnej połowie płaszczyzny
d/ proste, przechodzące przez ćwiartki II i IV, czyli proste równoległe do osi poziomej w dolnej połowie płaszczyzny.

Dochodzą tu jeszcze:
e/ prosta, przechodząca przez ćwiartki I i IV - prosta /oś/ skośna, przechodząca przez punkt przecięcia osi pionowej i poziomej, oraz
f/ prosta, przechodząca przez ćwiartki II i III - również prosta skośna, przechodząca przez punkt przecięcia osi pionowej i poziomej.

Z nieskończonej mnogości prostych, należących do rodzajów a, b, c, d wybieramy z każdego rodzaju jedną, jako przedstawicielkę danej kategorii prostych. Dołączając proste e i f, otrzymamy 6 prostych kategorialnych, przechodzących przez 2 ćwiartki, które kreślimy na naszej płaszczyźnie geometryczno-kategorialnej /patrz niżej/.



Rys. 5.

Co zaś dotyczy punktów, mających się znajdować w dwóch, i tylko w dwóch, ćwiartkach płaszczyzny, to jest to możliwe wtedy, gdy będą to punkty graniczne, t. j. znajdujące się na wspólnej granicy dwóch ćwiartek. Będą to przede wszystkim punkty, leżące na osiach poziomej oraz pionowej, z prawa i lewa od punktu środkowego oraz w górę i dół od niego.

A więc:
a,/ punkty, leżące na granicy ćwiartek I i II /na prawej połowie osi poziomej/
b,/ punkty, leżące na granicy ćwiartek III i IV /na lewej połowie osi poziomej/
c,/ punkty , leżące na granicy ćwiartek I i III /na górnej połowie osi pionowej/
d,/ punkty, leżące na granicy ćwiartek II i IV /na dolnej połowie osi pionowej/

Z nieskończonej mnogości punktów, należących do rodzajów a,, b,, c,, d,, wybieramy z każdego rodzaju jeden, jako przedstawiciela danej kategorii punktów. Te 4 punkty kategorialne widzimy już na naszej płaszczyźnie geometryczno-kategorialnej /rys. 3/; jeden na prawej połowie osi poziomej /przecięcie tej osi z prostą równoległą do osi pionowej w prawej połowie płaszczyzny/, drugi na lewej połowie tej osi, trzeci na górnej połowie osi pionowej, czwarty - na dolnej połowie tej osi.

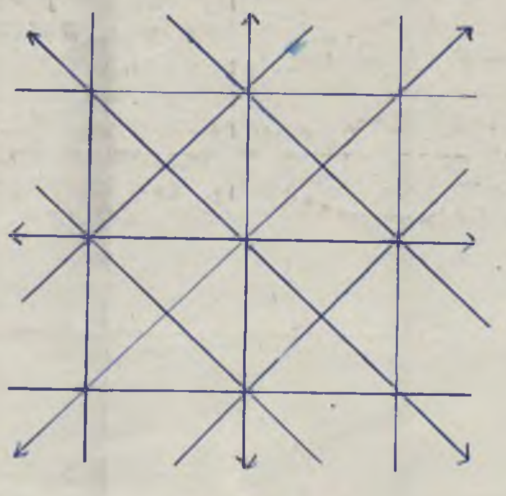
Do tych 4 kategorialnych punktów "dwućwiartkowych" dochodzą jeszcze dwa, mianowicie:
e,/ punkt, leżący na granicy ćwiartek I i IV, oraz
f,/ punkt, leżący na granicy ćwiartek II i III.

Nie będą to jednak już punkty "właściwe", w skończoności leżące, lecz punkty "niewłaściwe", leżące w nieskończoności na osiach skośnych /e i f/. Istnienie tych "niewłaściwych" punktów dwućwiartkowych potwierdza przychodzący z pomocą naszej intuicji rachunek geometryczny, o którym niżej.

Ad 3/. Jeżeli teraz przejdziemy do rozpatrzenia kwestji linii prostych, leżących w trzech ćwiartkach, to znajdziemy się wobec prostych, że się tak wyrazimy - "najpospolitszych", albowiem wszelka prosta skośna /z wyjątkiem osi skośnych/, jest właśnie taką prostą "trójćwiartkową". Mamy 4 rodzaje takich prostych, mianowicie:

α/ proste, przechodzące przez ćwiartki I, II, III
β/ " " " " II, III, IV
γ/ " " " " I, II, IV
δ/ " " " " I, III, IV

4 linie proste skośne, równoległe do osi skośnych, reprezentujące 4 rodzaje prostych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, wprowadzamy na naszą płaszczyznę geometryczno-kategorialną /rys. 4./.



Rys. 4.

Co zaś dotyczy punktów "trzyćwiartkowych", t. j. takich, które leżałyby na granicy trzech ćwiartek / i tylko trzech ćwiartek/ - to, oczywiście, punktów takich nie ma, podobnie jak nie ma prostych, które by się znajdowały tylko w obrębie jednej ćwiartki.

Ad 4/. Zapytujemy teraz, czy i jakie linie proste mogą leżeć we wszystkich ćwiartkach płaszczyzny? Proste takie istnieją i będą nimi, oczywiście, osie główne na płaszczyźnie - pozioma i pionowa. Oś pozioma leży nietylko w 2 górnych ćwiartkach, lecz i w 2 dolnych, tworząc ich wspólną granicę. Te proste były pierwszymi elementami, wniesionymi na naszą płaszczyznę geometryczno-kategorialną /por. rys. 1 i następne/.

Jeżeli teraz zapytamy o punkt, leżący we wszystkich ćwiartkach płaszczyzny, to taki punkt graniczny, punkt styczności wszystkich ćwiartek, natychmiast odpoznamy w punkcie centralnym płaszczyzny, w punkcie przecięcia się jej osi głównych. Kiedyśmy kreślili na płaszczyźnie jej pierwsze elementy kategorialne - oś poziomą i oś pionową - równocześnie wykreśliliśmy i ten punkt kategorialny, jako przecięcie tych osi, jako środek układu współrzędnych.

Ad 5/. Wreszcie zapytujemy, czy istnieją proste i punkty poza obrębem ćwiartek płaszczyzny? Jeżeli chodzi o punkty "właściwe", t. j. leżące w skończoności, to wszystkie one, oczywiście, należą do jednej z poprzednich kategorii, leżą w obrębie ćwiartek płaszczyzny; jeżeli jednak pojęcie punktu rozszerzymy na punkty "niewłaściwe", t. j. punkty w nieskończoności - jak to czyni geometria rzutowa - wtedy sprawa przedstawi się inaczej. Mianowicie: w nieskończoności na osi pionowej mieć będziemy punkt, wyznaczony przez "przecięcie" w nieskończoności prostych równoległych do osi pionowej, z prawa i z lewa od niej leżących. Punkt taki - ~~jak to wykaże najprostszy rachunek~~ - wychodzi już poza obręb ćwiartek płaszczyzny. Taki sam punkt kategorialny odnajdujemy i na osi poziomej, w nieskończoności. Te dwa punkty w nieskończoności łączy prosta w nieskończoności, prosta "niewłaściwa"; i ona również ~~- jak się łatwo o tym przekonać za pomocą rachunku~~, nie leży ani w jednej, ani w dwóch, ani w trzech, ani w czterech ćwiartkach płaszczyzny i w ten sposób stanowi nową kategorię geometryczną.x/

Analiza nasza elementów płaszczyzny geometrycznej z punktu widzenia ich położenia jest ukończona. W rezultacie wszystkie rodzaje /kategorie/ punktów i prostych na płaszczyźnie zostały określone i w postaci punktów i prostych kategorialnych przedstawione na ~~rys.~~ diagramacie 4.xx/ Rysunek ten przedstawia w ten sposób ~~wszystkie~~ płaszczyznę geometrycz-

---

x/. Oczywiście diagramat nasz /rys. 4/, z natury rzeczy objąć mogący tylko kategorialne elementy "właściwe", nie zawiera ani prostej w nieskończoności, ani punktów na niej leżących - dwóch "pozaćwiartkowych" i dwóch "dwućwiartkowych" /por. koniec ad 2./. Te "niewłaściwe" kategorie geometryczne trzeba ~~"w myśli" dołączyć do~~ "właściwych", widocznych na diagramacie, i ustosunkować względem nich.

xx/. Co do tego przedstawienia patrz restrykcję, zawartą w poprzednim odnośniku.

ną ze wszystkimi jej elementami, lecz nie płaszczyznę geometryczną zwykłą, mnogościową, o nieograniczonej liczbie elementów, a tylko płaszczyznę geometryczną kategorialną, gdzie każdy rodzaj elementów jest przedstawiony przez jeden tylko element, przez element kategorialny, kategorię geometryczną, odmienną jakość geometryczną, n.p. oś pionowa, punkt w pierwszej ćwiartce, prosta równoległa do osi pionowej i naprawo od niej położona i t. p. Mamy więc tu elementy geometrii nawskroś jakościowej, nie operującej pojęciami wielkości i odległości, lecz interesującej się tylko położeniem elementów. Taka geometria jakościowa, nie-miarowa, nie-ilościowa przybrała w pierwszej połowie XIX stulecia postać systematyczną i znana jest teraz pod nazwą geometrii rzutowej albo geometrii położenia. Jako dyscyplina wyłącznie matematyczna występuje ona w postaci mnogościowej, operuje nieograniczoną ilością elementów. U nas natomiast te elementy jakościowe sprowadzone są do postaci typów, kategorii - w ten sposób występują one tutaj jako elementy geometrii jakościowej /geometrii położenia/ kategorialnej x/.

System elementów takiej geometrii mamy właśnie przed sobą na rys 4. Zadanie jej polega na zbadaniu stosunków, zachodzących między tymi elementami. I tu już zastosowanie pojęć zwykłej /mnogościowej/ geometrii rzutowej /geometrii położenia/ oddać może znaczne usługi. Pojęcia działań geometrycznych /działanie rzutowania czyli łączenia oraz działanie cięcia/, pojęcie pęku prostych, czworokątów i czworoboków zupełnych, pojęcie dualności punktu i prostej, pojęcie czwórek harmonicznych i t. d. są tu w wysokim stopniu pomocne przy określaniu stosunków, zachodzących między elementami geometrii kategorialnej. Lecz ta droga czysto geometryczna nas w tej chwili nie interesuje; teraz chodzi o to, czy nie dałoby się tu wprowadzić jakiego rachunku, operującego znakami, jakiegoś algorytmu, który pozwoliłby odkrywać i przedstawiać symbolicznie związki, zachodzące między kategoriami geometrycznymi. Byłby to więc rachunek kategorialnych punktów /położeń/ i prostych /kierunków/.

Do ustanowienia takiego rachunku geometrycznego teraz przechodzimy.

II.

Geometria kategorialna i jej "charakterystyka" algebraiczno-jakościowa

Zwracamy się do naszego rys. 4, przedstawiającego - jak wiemy - system elementów geometrii kategorialnej xx/. Punkt, leżący na prawej połowie osi poziomej, oznaczamy przez a ; punkt przeciwległy tej osi, t.j. leżący na jej lewej połowie, - przez a′ /negacja a/; punkt, leżący na górnej połowie osi pionowej, oznaczamy przez b; punkt przeciwległy tej osi, t.j. leżący na jej dolnej połowie, - przez b′ /negacja b/. Dla oznaczenia dwóch zasadniczych działań geometrii rzutowej: przecinania /zjednoczenia/ i łączenia /rzutowania/ wprowadzamy znaki + i x. Znaczy to, że gdy np. punkty a i b poddajemy działaniu łączenia, krótko mówiąc: łączymy, to wyrażamy to przez a x b /albo wprost ab/ i ten iloczyn algebraiczny będzie oznaczał wytwór geometryczny tego połączenia punktów a i b, czyli będzie oznaczał /nieograniczoną/ linię prostą, łączącą te punkty. I odpowiednio dla przecinania się /zjednoczenia/ linii prostych: tutaj znów suma algebraiczna (a+b) będzie oznaczała punkt ich przecięcia xxx/.

Wobec powyższego linię, łączącą punkt /pozytywny/ a z punktem /negatywnym/ a′, czyli oś poziomą, oznaczać będziemy przez aa′ i podobnie oś pionową, łączącą punkty b i b′ - przez bb′. Te osie współrzędnych /na których leżą punkty współrzędne a, a′ i b, b′/ oznaczymy symbolem 0 / a więc aa′=0 i bb′=0/, x/ Symbol 0 przedstawia - jak wiadomo - moduł dodawania, bowiem jest to taki element, który dodany do jakiegoś elementu /np. do elemen-

---

x/. Antycypacji idei takiej geometrii napotykamy u Platona w jego nauce o figurach idealnych /por. naszą pracę p.t. "Początki logiki geometrycznej w filozofii Platona", Przegląd Klasyczny 1938, IV, 8-9/.

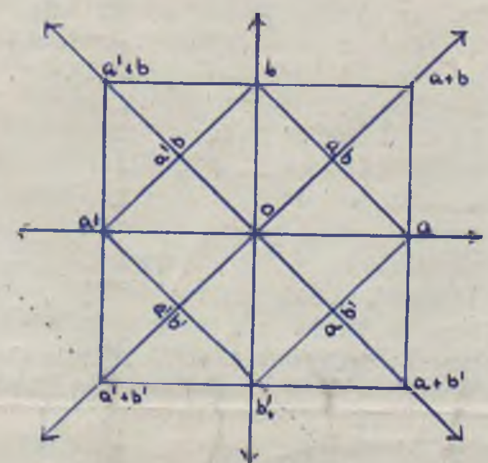
xx/. Geometria kategorialna jest tu ograniczona tylko do 2 wymiarów i do przypadku, kiedy a ≮ b, b ≮ a, a ≮ b′, b′ ≮ a, przyczem a ≮ a′, a′ ≮ a, b ≮ b′, b′ ≮ b.

xxx/. Stosunek incydencji /punkt leży na prostej, prosta przechodzi przez punkt, zawiera się w punkcie/ symbolizujemy przez znak <. Np. prosta a przechodzi przez punkt a+b; oznaczamy: a<a+b.

x/ albowiem one, jako momenty wyjścia i odniesienia dla dalszych zróżnicowań elementów płaszczyzny, same są elementami najmniej zróżnicowanymi, najmniej określonymi, są elementami minimalnymi,

tu a w sumie daje element mu równoważny /nie zmienia tego elementu/, a więc a+0=a. Podobnie też tutaj modułem przecinania będzie taka linia prosta, która przecięta przez linię prostą do niej prostopadłą w rezultacie daje punkt, równoważny linii przecinającej. Takimi modułami geometrycznego przecinania będą tu osie współrzędnych, minima jakości geometrycznach. Jeżeli tedy w przecięciu osi poziomej z prostą do niej prostopadłą otrzymujemy punkt a, znaczy to, że i ta prosta prostopadła musi być w znaczona jako prosta a, gdyż tylko a+0 daje a. Podobnie jak bok zewnętrznego kwadratu, przechodzący przez punkt współrzędny a jest - jak widzimy - bokiem a, tak też i pozostałe boki zewnętrznego kwadratu, przechodzące przez punkty współrzędne a´, b, b´ będą odpowiednio bokami a´, b, b´.

Oznaczenie pozostałych elementów naszego diagramatu nie przedstawia już teraz żadnych trudności. Tak więc np. wierzchołek zewnętrznego kwadratu, leżący w pierwszej ćwiartce na przecięciu prostych współrzędnych a i b, będzie punktem - sumą a+b; inne punkty - wierzchołki zewnętrznego kwadratu - będą odpowiednio punktami a+b´, a´+b i a´+b´. Boki zaś wewnętrznego kwadratu, jako łączące punkty współrzędne, będą odpowiednio iloczynami: ab, a´b, ab´ i a´b´. I jeszcze jedno: środek współrzędnych, t.j. punkt przecięcia osi współrzędnych, modułów przecinania /0/musi być zgodnie z określeniem tego modułu również elementem 0 /czyli 0+0=0/. W ten sposób wszystkie "właściwe" elementy geometrii kategorialnej zostały wyznaczone i diagramat 4 przedstawia się teraz, jak poniżej /patrz rys.5/



Rys. 5.

Pozostają do wyznaczenia jeszcze elementy kategorialne w nieskończoności, elementy "niewłaściwe": prosta i 4 punkty na niej leżące, a stanowiące przecięcie 4 osi /2 głównych i 2 skośnych/ z tą właśnie prostą w nieskończoności. Na osi pionowej w nieskończoności leży punkt przecięcia prostych a i a´, na osi poziomej w nieskończoności leży punkt przecięcia prostych b i b´. Pierwszy z tych punktów będzie więc punktem a+a´, drugi - punktem b+b´; te połączenia dodajne przeciwnych /dopełniających się/ jakości geometrycznych stanowią jakości maksymalne, które oznaczymy symbolem 1 /a więc a+a´=1 i b+b´=1/. Jeżeli teraz punkt a na osi poziomej połączymy linią prostą z tym punktem 1 w nieskończoności na osi pionowej, to otrzymamy - jak to widzimy na diagramacie - prostą a, czyli a.1=a; podobnie i dla połączenia b z jednością na osi poziomej /b.1=b/. Widzimy z tego, że punkty 1 w nieskończoności są modułami łączenia, podobnie jak główne osie współrzędnych 0 były modułami cięcia. Co dotyczy pozostałych 2 punktów w nieskończoności, to - jak wiemy - leżą one na dwóch osiach skośnych. Jeden z nich będzie punktem przecięcia dwóch prostych, równoległych do osi skośnej, łączącej punkty a+b i a´+b´ /czyli do prostej /a+b//a´+b´//. Te dwie proste równoległe to ab´ i a´b, tak że ich punkt przecięcia w nieskończoności będzie ab´+a´b. Podobnie punkt w nieskończonosci, leżący na drugiej osi skośnej, będzie punktem ab+a´b´. Wreszcie prosta w nieskończoności, łącząca punkty 1 i 1 /czyli prosta 1.1/, w myśl już istoty modułu łączenia musi być =1 /czyli 1.1=1/.

Zakończyliśmy wyznaczanie symboliczne elementów geometrii kategorialnej i stworzyliśmy w ten sposób warunki dla powstania rachunku geometrycznego. Weźmy parę przykładów takiego rachunku, parę twierdzeń, które zresztą możemy wprost odczytać na diagramacie /rys. 5/. Np. widzimy, że, łącząc punkt a+b z punktem a+b´ otrzymujemy prostą a, a więc że a=/a+b//a+b´/. Widzimy także, że punkt a jest przecięciem prostych ab i ab´, inaczej mówiąc, że jakość geometryczna a jest równoważna zjednoczonym jakościom geometrycznym ab i ab´. A dalej, że prosta a przecina się z prostą ab w punkcie a, czyli, że a+ab=a. Uprzednio mieliśmy już takie związki, jak a+0=a i a.1=a . Tych parę przykładów wy-

starcza zupełnie, ażeby się zorientować co do natury tego rachunku punktów i prostych,: ~~albowiem~~ we wzorach jego odpoznajemy niewątpliwie wzory algebry logiki; twierdzenie dichotomii, absorpcji i t.p. I ta całkowita równoległość, ta doskonała odpowiedniość i solidarność związków logiki algebraicznej, ze stosunkami, zachodzącymi między kategorialnymi elementami geometrycznymi, których system przedstawia nasz diagramat /rys. 5/, została wykazana przez nas nie na przykładach tylko, lecz systematycznie, poczynając od pewników i przechodząc następnie do twierdzeń logiki algebraicznej. Uczyniliśmy to w części I naszej "Logiki geometryczno-architektonicznej"[x/]. Tylko, że ten kierunek badania był tam odwrotny, aniżeli obecny; tam wyszliśmy z algebry logiki i dążyliśmy do jej geometryzacji; tutaj zaś, odwrotnie, idziemy od elementów geometrii kategorialnej i szukamy dla niej języka i rachunku algebraicznego, szukamy "charakterystyki" ~~geometrycznej~~ w leibnizowskim rozumieniu tych terminów. I oto okazuje się, że tą "charakterystyką" powstającej na tle geometrii rzutowej, geometrii kategorialnej, jest znana już oddawna, ~~przeszło od lat 80-ciu~~ prawie od lat 100, algebra jakościowa, algebra logiki. Ten zespół geometrii kategorialnej z jej "charakterystyką", t.j. z logiką algebraiczną, stanowić będzie kategorialną geometrię /algebraiczno-/logiczną, która znów, rozpatrywana od strony logiki, będzie kategorialną logiką geometryczną. W tej kategorialnej geometrii algebraiczno-logicznej mamy dokładny odpowiednik geometrii analitycznej Descartesa z tą różnicą, że rolę algebry ilościowej, która w geometrii analitycznej służy do odkrywania i formułowania własności kształtów przestrzennych, tutaj pełni algebra jakościowa, algebra logiki i, że poza tym ta geometria logiczna jest geometrią kategorialną, gdy natomiast geometria analityczna jest geometrią mnogościową.

Musimy jednak pamiętać o tym, że geometrię kategorialną możemy ukonstytuować, jako naukę usamodzielnioną, o własnych siłach i własną drogą zmierzającą do poznania stosunków między jakościami przestrzennymi, bez posiłkowania się w tym celu algebrą logiki. I wtedy to właśnie zobaczymy całkowitą równoległość tych dwóch nauk: każdemu elementowi jednej odpowiadać będzie analogiczny element w drugiej, każdemu pewnikowi jednej odpowiadać będzie analogiczny pewnik w drugiej[xx/]; z pewników tych, pari passu, rozwijać się będą odpowiadające sobie ściśle twierdzenia, tylko, że dowód tych twierdzeń inny będzie na płaszczyźnie algebraiczno-logicznej, inny na płaszczyznie geometrycznej; w pierwszym wypadku polegać będzie na szeregu działań rachunkowych, operujących symbolami, w drugim - na metodycznym szeregu powiązanych z sobą pokazów i stwierdzeń intuicyjnych, opartych o obraz elementarnej płaszczyzny kategorialnej /rys. 5/.

----

x/. Benedykt Bornstein. Architektonika świata, tomów 3. Bibliotheca Universitatis Liberae Polonae, Warszawa 1934-1936. Tom drugi "Logika geometryczno-architektoniczna", 1935. Część I: "Zgeometryzowanie i skategorializowanie logiki algebraicznej.

xx/. Pewniki geometrii kategorialnej, odpowiadające pewnikom algebry logiki /co do pewników tej logiki por. naszą "Logikę geometryczno-architektoniczną", str. 10-13/, ~~będą następujące:~~ taką z zasadami przyjmą postać:

1. Określenie osi współrzędnych i punktów w nieskończoności jako modułów geometrycznych.

1a. Przez "poziomą oś współrzędnych" /0/ rozumiemy taką prostą, która w przecięciu /+/ z prostopadłą do niej ~~prostą współrzędną~~ /a/ daje punkt a, a więc 0+a=a - podobnie dla osi pionowej. I dualnie:

1b. Przez "punkt w nieskończoności na pionowej osi współrzędnych" /1/ rozumiemy taki punkt, który w połączeniu /x/ z punktem współrzędnym /a/ daje prostą a, a więc 1.a=a - podobnie dla punktu w nieskończoności na osi poziomej.

2. Zasada przemienności.

2a. Wytwór przecięcia /+/ dwóch prostych a i b nie zależy od tego, która z nich jest przecinana /pierwsza/, która zaś przecinająca /druga/, czyli nie zależy od ich porządku [a+b=b+a]. I dualnie:

2b. Wytwór połączenia /x/ dwóch punktów a i b nie zależy od tego, który z nich jest ten, który się łączy /pierwszy/, a który ten, z którym się łączy /drugi/, czyli nie zależy od ich porządku [ab=ba].

3. Zasada rozdzielności.

3a. Przeciąć /+/ prostą a prostą bb′ znaczy ~~(jest równoważne)~~: przeciąć /+/ prostą a prostą b, ~~xxxxxxxxxx~~, następnie prostą b′, i wziąć prostą, łączącą /x/ punkty w ten sposób otrzymane [a+bb′=/a+b//a+b′/]. I dualnie:

3b. Połączyć /x/ punkt a z punktem /b+b′/ znaczy ~~/jest równoważne/~~: połączyć /x/ punkt a z punktem b, następnie z punktem b′ i wziąć punkt przecięcia /+/ prostych w ten sposób otrzymanych [a(b+b′)= = ab+ab′].

[d.c. na dole nast. str.]

Wspomnieliśmy przed chwilą, że geometria kategorialna i logika algebraiczna w swym doskonałym paralelizmie wykazują przede wszystkim odpowiedniość zupełną swych elementów. Elementami geometrii kategorialnej są kategorie przestrzenno-geometryczne /por. rys. 5/, stąd wynika - przy odpowiedniości elementów tych dwóch nauk - że elementami logiki będą tu również kategorie, oczywiście kategorie logiczne. I tak też jest w istocie rzeczy. Mamy tu system spójny kategorii logicznych takich, jak rodzaj /b/, różnica gatunkowa /a/, gatunek /a+b/ i ich dualności, mamy kategorie naczelne, zasady logiczne, w postaci elementów 0 i 1 - a wszystko to w doskonałej odpowiedniości z kategoriami geometrycznymi. Te dwie dziedziny - logiczna i geometryczna - tak ściśle przylegają do siebie, że w istocie rzeczy zlewają się ze sobą i mamy tu raczej do czynienia z jedną jedyną dziedziną, rozpatrywaną tylko z dwóch stron; i mamy tu w istocie rzeczy jedną tylko naukę - wszystko jedno, czy ją nazwiemy kategorialną geometrią logiczną /logotopiką/, czy też kategorialną logiką geometryczną /topologiką/ - która w zależności od punktu widzenia przedstawia nam dwa swe równoległe aspekty /kategorialna geometria - - kategorialna logika/, pseudo-samodzielne i o zubożałej treści. W istocie rzeczy, w swej pełni i konkretności, elementy logiczne są równocześnie geometryczne, elementy zaś geometryczne są logiczne; sensy są położeniami, położenia są sensami /λόγος - τόπος/. Co to znaczy? znaczy to, że sens, znaczenie elementu, jakość specyficzna, jaką przedstawia, polega na jego "stanowisku" w systemie, do którego należy, na "miejscu", jakie w całości tego systemu zajmuje, na jego "położeniu"; i odwrotnie "położenie", "miejsce", "stanowisko" elementu w całości jest równoznaczne z jego sensem /znaczeniem/ w systemie i dla systemu. I z tego konkretu, z tego splecenia λόγος - τόπος wyróżnicowują się dopiero i usamodzielniają jego momenty abstrakcyjne, których odpowiedniość i solidarność świadczy jednak o ich wspólnym pochodzeniu, o wspólnej całości, której są momentami. W ten oto sposób objaśnia się ten niewątpliwy, a jednak pozornie niezrozumiały, paralelizm tych dwóch biegunowo różnych dziedzin - logicznej i przestrzennej, i objaśnia się ten fakt, że ich kategorie, stosunki, działania - słowem cały ich "porządek" - tak się wzajemnie odwzorowują.

----

4. Określenie negatywnych elementów.

4a. Przez prostą negatywną /a′/ rozumiemy taką prostą, która w przecięciu /+/ z prostą pozytywną /a/ daje punkt w nieskończoności na pionowej osi współrzędnych [a+a′=1]. ~~I~~ Dualnie:

4b. Punkt negatywny /a′/ w połączeniu /x/ z punktem pozytywnym /a/ daje poziomą oś współrzędnych [aa′=0]. Podobnie dla elementów ~~negatywnych~~ b′ ~~i b~~.

Dołączamy tu jeszcze pewniki /określenia/ incydencji i kongruencji.

5. Pewnik /określenie/ incydencji. Prosta a przechodzi przez punkt b wtedy i tylko wtedy, gdy prosta a zajmuje położenie /kierunek/ prostej ab [a<b=a=ab/].

O prawdziwości tego pewnika przekonamy się, gdy prostą a obrócimy około punktu a o kąt 45° w ten sposób, że prosta a zajmie położenie prostej ab; wtedy bowiem prosta a - jak widzimy - przejdzie przez punkt b, i odwrotnie: gdy prosta a przejdzie przez punkt b, wtedy, jak widzimy, prosta a zajmie położenie prostej ab /zleje się z prostą ab/.

6. ~~Wreszcie~~ Pewnik /określenie/ kongruencji. ~~[/a=b/=/a<b/+/b<a/]~~.

Prosta a kongruuje z prostą b /przystaje do prostej b, zlewa się z prostą b/ wtedy i tylko wtedy, gdy prosta a przechodzi przez punkt b, prosta zaś b przez punkt a [(a=b)=(a<b)+(b<a)].

Prawdziwość tego pewnika widoczna jest natychmiast z diagramatu, albowiem teraz zarówno prosta a, jak i prosta b, zlewają się z prostą ab, a więc i z sobą wzajemnie.

III.

Geometria kategorialna a filozofia i nauki poszczególne.

Szereg momentów składa się na to, że geometria kategorialna nie jest tylko nauką matematyczną, lecz wykazuje również najbliższe kontakty z filozofią. Jest ona bowiem nie ilościową geometrią, lecz jakościową i nie mnogościową, lecz kategorialną, a przede wszystkim, jak się okazało, jest ona całkowicie solidarna z układem logiki, tak, że w swej pełnej postaci jest nie tylko geometrią, lecz i logiką, jest kategorialną geometrią algebraiczno-logiczną. Otóż właśnie ta ścisła równoległość układu geometrii kategorialnej i układu logiki, systemu jakości przestrzennych i systemu jakości logicznych, posiada głębokie znaczenie filozoficzne. Wskazuje ona, że ten sam system jakości abstrakcyjnych panuje w tych tak różnych od siebie sferach, że utrzymuje się on i zachowuje poprzez całą różnicę substratów tych sfer, poprzez różnicę przestrzenności i nieprzestrzenności, tak, że wszystko przemawia za tym, że ten zachowujący się system jakości jest wszelkich jakości układem, układem jakości wogóle, czyli układem uniwersalnym i ontologicznym x/. I ten właśnie uniwersalny i ontologiczny system jakości - "porządek świata" - mamy dany w geometrii kategorialnej w jego specyfikacji przestrzennej, intuicyjnej, mamy go przed oczyma w jego przejawie widzialnym, a wszystkie związki między jego elementami /kategoriami/ dają się tu nie tylko wydedukować za pomocą rachunku, lecz również prześledzić i stwierdzić naocznie. Dzięki temu swemu "modelowi" ontologia i kategoriologia staje się nauką ścisłą, jakościowo matematyczną, i realizuje się myśl-marzenie Leibniza, że "scriptura philosophica posset etiam exhiberi per linearum ductum seu geometriam" /Gerh. Phil., VII, 41/. I odwrotnie, kategorialna geometria, jako "model" ontologii (i ogólnej logiki) staje się nauką nawskroś filozoficzną, pośredniczącą przy tym między abstrakcyjnością czystej ontologii a konkretnością struktur poszczególnych dziedzin realnego świata.

We wszystkich bowiem dziedzinach świata realizuje się układ kategorii ontologicznych, reprezentowany przez kategorialną geometrię logiczną xx/; wszędzie też odkrywamy rozliczne struktury architektoniczne, które dojrzeć i wyodrębnić w tym układzie ontologicznym pomaga nam właśnie jego odwzorowanie intuicyjne. Teraz zaczynamy rozumieć głębokie znaczenie schematów geometrycznych, które napotykamy w rozmaitych naukach, te oktaedry barw, te trójkąty dźwięków w teorii akordów muzycznych, te czworościany i sześciany w chemii xxx/ i t.d., i t.d., nie mówiąc już o schematach geometrycznych w samej logice. Nie mamy tu bynajmniej powierzchownego, dydaktycznego tylko i rysunkowego przedstawienia stosunków, panujących w rozmaitych dziedzinach rzeczywistości, lecz, przeciwnie, w schematach tych widzimy upostaciowanie praw uniwersalnych, wiecznych praw ontologicznych, które się w danej dziedzinie przejawiają, widzimy w nich przedstawicieli kategorialnej geometrii ontologicznej, naocznie wyznaczającej konstytucję świata i jego dziedzin. A równocześnie zaczynamy rozumieć metodologiczne znaczenie kategorialnej geometrii dla poszczególnych nauk: podobnie jak matematyka ilościowa pozwala a priori odkrywać związki ilościowe świata realnego, to samo czynić jest zdolna matematyka jakościowa dla jego jakościowego aspektu. W tej "mathesis universalis", w tej geometrii filozoficznej ~~[illegible]~~ zjednoczą się w przyszłości wszystkie nauki poszczególne, jeśli chodzi o ich jakościowy aspekt, gdyż wszystkie one tkwią korzeniami w filozofii, a filozofią jest właśnie ta kategorialna geometria logiczna, algebraiczno-logiczna i ontologiczna - filozofią, a równocześnie nauką ścisłą.

---

x/. Kategoriami podstawowymi układu ontologicznego są: materia /substrat/ i forma oraz ich wytwór: materio-forma /synolon Arystotelesa, mikton Platona/, przy tym w dwoistej /dualnej/ postaci; specyfikacjami tych kategorii ontologicznych są właśnie kategorie logiczne: rodzaj, różnica gatunkowa oraz ich wytwór - gatunek, wszystkie w dwoistej postaci, jak również kategorie geometryczne: prosta pozioma, prosta pionowa, ich punkt przecięcia wraz z ich dwoistościami, /dwa punkty i prosta, która je łączy/.

xx/. Chcemy tu zwrócić uwagę na to, że rys. 5 przedstawia podstawowy układ kategorialnej geometrii, lecz nie jedyny.

Istnieją bowiem jeszcze układy pochodne, powstałe przez obrót prostych współrzędnych diagramatu podstawowego o kąt 45° /por. w przedostatnim odnośniku pewnik incydencji/ lub o kąt 90° /układy dialektyczne/. Por. Architektonika świata, część I: Specyfikacje architektoniki logiczno-geometrycznej.

Układy takie świadczą o niejednorodności ich przestrzeni kategorialnej, a więc o jej nieeuklidesowym charakterze /por. "Architektonika świata" III, część I - Specyfikacje architektoniki logiczno-geometrycznej/.

xxx) Sześcian i ośmiościan występują w w kategorialnej geometrii trójwymiarowej na miejscu dualnych kwadratów kategorialnej geometrii płaskiej.

Warszawa, 5 sierpnia 1940 r.